

# Elektrostatische Stabilität eines nicht-maxwellschen homogenen Plasmas

Von D. PFIRSCH

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik und Astrophysik, München  
(Z. Naturforsch. 17 a, 315—320 [1962]; eingegangen am 8. Januar 1962)

For studying the electrostatic stability or instability of a homogeneous plasma with a non-MAXWELLIAN velocity distribution of the electrons and ions, both undisturbed distribution functions are expanded into a series of HERMITIAN polynomials multiplied by a GAUSSIAN function. By this procedure the dispersion-relation derived from the linearized VLASOV equation is expressed by the coefficients of that expansion and by the *temperature* and the mean velocity of the electrons and ions. This dispersion-relation is discussed numerically for certain sets of these parameters which in particular include the effect of run-away electrons. They cause an instability just at the moment when they lead to a second maximum in the undisturbed distribution function. This second maximum does not have to be very large to get rather high growth rates ( $\sim 0.05 \omega_p$  in the examples given) for the unstable modes, the real part of the frequency being of the order  $\omega_p$  and the wave length of the order of the DEBYE length.

The critical mean velocity for the onset of two-stream instability of the electrons against the ions tends to increase (rather than diminish) by the run-away electrons, contrary to what one might expect on first sight.

Ein vordringliches Problem der derzeitigen Plasmaphysik ist die Frage nach der Ursache für die erhöhte Diffusion von geladenen Teilchen in einem Plasma senkrecht zu einem Magnetfeld, wie sie z. B. in Stellaratorexperimenten beobachtet wird. Verschiedene Autoren<sup>1-3</sup> haben darauf hingewiesen, daß Hochfrequenzinstabilitäten für diese Erscheinung verantwortlich sein könnten. Eine Art solcher Instabilitäten ist die elektrostatische Instabilität homogener Plasmen, deren Auftreten durch gewisse Abweichungen der Geschwindigkeitsverteilungsfunktionen der Elektronen und Ionen vom thermodynamischen Gleichgewicht bedingt ist. In verschiedenen neueren Arbeiten wird diese Instabilität behandelt<sup>4-9</sup>; die diesen Untersuchungen zugrunde liegende Dispersionsbeziehung bezieht sich auf longitudinale Wellen in einem räumlich homogenen Plasma ohne Magnetfeld bzw. mit homogenem Magnetfeld, wobei die Ausbreitung der Wellen nahezu parallel zu diesem Magnetfeld erfolgen muß.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist erstens, durch Entwicklung der Verteilungsfunktionen der Elektronen und Ionen nach HERMITESCHEN Polynomen diese Dispersionsrelation mittels der Koeffizienten dieser Entwicklung darzustellen, und zweitens, die so erhaltene Form der Dispersionsbeziehung numerisch zu diskutieren. Die Entwicklung nach HERMITESCHEN

Polynomen hat zwei Vorteile: erstens besitzt sie eine enge Beziehung zu Momentenentwicklungen der BOLTZMANN-Gleichung, interessierende Koeffizienten können also durch Lösen gewisser makroskopischer Gleichungen gefunden werden; zweitens ist es durch diese Entwicklung möglich, eine Vielzahl von Verteilungsfunktionen relativ einfach zu untersuchen.

## I. Darstellung der Dispersionsrelation durch die Entwicklungskoeffizienten

Untersucht wird die Dispersionsbeziehung<sup>5-9</sup>:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(v)}{v-z} dv = \frac{k^2}{\omega_p^2} \quad (1)$$

mit

$$G(v) = \frac{\partial f_e}{\partial v} + \zeta \frac{m_e}{m_i} \frac{\partial f_i}{\partial v}; \quad (2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_e dv = \int_{-\infty}^{\infty} f_i dv = 1.$$

Die Funktionen  $f_{i,e}$  sind die ungestörten Verteilungsfunktionen der Ionen (i) und Elektronen (e), die nur noch von der Geschwindigkeitskomponente parallel zur Wellenausbreitung abhängen;  $\zeta$  ist die Ladungszahl der Ionen;  $z = \omega/k$ ;  $\Im \omega > 0$  (das bedeutet Instabilität),  $k$  ist der Wellenvektor parallel zu  $v$ ,  $k$  wird im folgenden  $\geq 0$  angenommen.

<sup>1</sup> L. BIERMANN u. D. PFIRSCH, Z. Naturforsch. 15 a, 10 [1960].

<sup>2</sup> L. SPITZER, Phys. Fluids 3, 659 [1960].

<sup>3</sup> I. B. BERNSTEIN, E. A. FRIEMAN, R. M. KULSRUD u. M. N. ROSENBLUTH, Phys. Fluids 3, 136 [1960].

<sup>4</sup> O. BUNEMAN, Phys. Rev. 115, 503 [1959].

<sup>5</sup> J. D. JACKSON, J. Nucl. Energy, Part C 1, 171 [1960].

<sup>6</sup> O. PENROSE, Phys. Fluids 3, 258 [1960].

<sup>7</sup> E. A. JACKSON, Phys. Fluids 3, 786 [1960].

<sup>8</sup> I. B. BERNSTEIN u. R. M. KULSRUD, Phys. Fluids 3, 937 [1960].

<sup>9</sup> I. B. BERNSTEIN u. R. M. KULSRUD, Princeton, New Jersey, University MATT-66 [1961].



Die ungestörten Verteilungsfunktionen werden in folgender Weise nach HERMITESchen Polynomen entwickelt:

$$f_{i,e}(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{C_{i,e}} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{i,e} H e_n \left( \frac{v - u_{i,e}}{C_{i,e}} \right) \exp \left\{ -\frac{(v - u_{i,e})^2}{2 C_{i,e}^2} \right\}, \quad (3)$$

$$c_0^{i,e} = 1, \quad c_1^{i,e} = c_2^{i,e} = 0, \quad C_{i,e}^2 = \frac{k T_{i,e}}{m_{i,e}},$$

$u_{i,e}$  = mittlere Geschwindigkeit der Ionen bzw. Elektronen.

$$\text{Schreiben wir} \quad w_{i,e} = v/C_{i,e}, \quad u_e = u C_e, \quad u_i = 0, \quad (4)$$

dann erhalten wir für  $G(v)$  den Ausdruck:

$$G(v) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{C_e^2} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^e H e_{n+1}(w_e - u) \exp \left\{ -\frac{1}{2}(w_e - u)^2 \right\} + \zeta \frac{T_e}{T_i} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^i H e_{n+1}(w_i) \exp \left\{ -\frac{1}{2} w_i^2 \right\} \right]. \quad (5)$$

$$\text{Führen wir weiter ein} \quad w_1 = (z/C_e) - u, \quad w_2 = z/C_i, \quad (6)$$

$$\text{was wegen (2 a)} \quad \Im w_1 > 0, \quad \Im w_2 > 0, \quad (6a)$$

impliziert, dann erhält die Dispersionsbeziehung die folgende Form:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \sum_{n=0}^{\infty} c_n^e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H e_{n+1}(t)}{t - w_1} \exp \{ -t^2/2 \} dt + \zeta \frac{T_e}{T_i} \sum_{n=0}^{\infty} c_n^i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{H e_{n+1}(t)}{t - w_2} \exp \{ -t^2/2 \} dt \right] + \frac{k^2 C_e^2}{\omega_p^2} = 0. \quad (7)$$

Die Integrale, die hierin auftreten, können entweder exakt gelöst oder auf eine bequemere Form gebracht werden. Mit dem Additionstheorem für HERMITESche Polynome gilt zunächst

$$H e_{n+1}(t - w + w) = 2^{-(n+1)/2} \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} H e_{n+1-m}(\sqrt{2} w) H e_m[\sqrt{2}(t - w)]. \quad (8)$$

Typische Integrale, die gelöst werden müssen (die hier verwendete Lösungsmethode ist eine Erweiterung der von JACKSON<sup>5</sup> benutzten), sind also:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{H e_m[\sqrt{2}(t - w)]}{t - w} \exp \{ -t^2/2 \} dt = \int \frac{H e_m(\sqrt{2} t)}{t} \exp \{ -t^2/2 - w t \} dt \cdot \exp \{ -w^2/2 \} \quad (9)$$

$$\equiv \sqrt{2\pi} \exp \{ -w^2/2 \} J_m(w).$$

Der Integrationsweg für das zweite Integral in der komplexen  $t$ -Ebene verläuft von  $-\infty$  nach  $+\infty$  entlang der reellen Achse, aber unterhalb  $t = 0$ .

$J_m(w)$  hat die folgende Eigenschaft:

$$\frac{dJ_m(w)}{dw} = - \int_{-\infty}^{\infty} H e_m(\sqrt{2} t) \exp \{ -t^2/2 - w t \} dt = -i^m \exp \{ w^2/2 \} H e_m(i \sqrt{2} w). \quad (10)$$

$$\text{Daraus folgt} \quad J_m(w) = - \int_0^w i^m H e_m(i \sqrt{2} t) \exp \{ t^2/2 \} dt + J_m(0) \quad (11)$$

$$\text{mit} \quad J_m(0) = \int_v H e_m(\sqrt{2} t) \cdot (1/t) \exp \{ -t^2/2 \} dt. \quad (12)$$

Dieses letzte Integral kann sofort gelöst werden. Für gerades  $m$  ist  $J_m(0)$  gleich dem halben Residuum bei  $t = 0$ , also

$$J_m(0) = i \sqrt{\pi/2} \frac{(-1)^{m/2} m!}{2^{m/2} (m/2)!}, \quad m \text{ gerade.} \quad (12a)$$

Für ungerades  $m$  ist es bequem,  $H e_m(\sqrt{2} t)$  durch HERMITESche Polynome gerader Ordnung in folgender Weise darzustellen:

$$H e_m(\sqrt{2} t) = \sqrt{2} t \sum_{\mu=0}^{(m-1)/2} (-1)^\mu \frac{[(m-1)/2]!}{[(m-1)/2-\mu]!} 2^\mu H e_{m-1-2\mu}(\sqrt{2} t).$$

Mit dem Additionstheorem für  $H e_{m-1-2\mu}(\sqrt{2} t) = H e_{m-1-2\mu}\left(\frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$

und den Orthogonalitätsrelationen für HERMITESche Polynome wird dann

$$J_m(0) = \sqrt{2} 2^{(m-1)/2} \left(\frac{m-1}{2}\right)! (-1)^{(m-1)/2} \sum_{\mu=0}^{(m-1)/2} (-1)^\mu 2^{-2\mu} \binom{2\mu}{\mu}. \quad (12b)$$

Zu lösen sind jetzt noch die Integrale in (11). Für ungerades  $m$  ist dies in geschlossener Form möglich:

$$J_m(w) - J_m(0) = (-1)^{(m+1)/2} 2^{m-1/2} m! \cdot \sum_{\nu=0}^{(m-1)/2} 2^{-3\nu} (-1)^\nu \frac{(m-1)/2-\nu}{(m-2\nu)! \nu!} \sum_{s=0}^{(m-1)/2-\nu} (-1)^s \frac{1}{s!} \left(\frac{w^2 s}{2} \exp\{w^2/2\} - \delta_{s0}\right),$$

$m$  ungerade. (11a)

Für gerades  $m$  können die Integrale natürlich auf das Fehlerintegral zurückgeführt werden, sie wurden hier aber direkt numerisch integriert; für großes Argument konnten bequeme asymptotische Formeln benutzt werden.

Es ist jetzt praktisch, Funktionen  $G_n(w)$  mittels der Funktionen  $J_m(w)$ , durch

$$G_n(w) = 2^{-(n+1)/2} \sum_{m=0}^{n+1} \binom{n+1}{m} H e_{n+1-m}(\sqrt{2} w) \exp\{-w^2/2\} J_m(w) \quad (13)$$

mit der Eigenschaft

$$G_n(-w^*) = (-1)^n G_n^*(w) \quad (13a)$$

zu definieren, wodurch die Dispersionsbeziehung schließlich die Gestalt erhält

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^e G_n(w_1) + \zeta(T_e/T_i) \sum_{n=0}^{\infty} c_n^i G_n(w_2) + k^2 C_0^2 / \omega_p^2 = 0. \quad (14)$$

Kennt man also eine gewisse Anzahl der Funktionen  $G_n(w)$ , dann kann man eine große Anzahl von Verteilungsfunktionen diskutieren. Diese Funktionen wurden vom Autor tabuliert, Tabellen sind erhältlich.

## II. Lösung der Dispersionsrelation

Die Methode, nach der die Dispersionsbeziehung (14) gelöst werden soll, ist die von JACKSON<sup>7</sup> benutzte. Es handelt sich dabei um eine graphische Methode, die es erlaubt, eine große Mannigfaltigkeit von Parameterwerten auf einfache Weise zu definieren. Es sei

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^e G_n(w_1) = G^e(w_1) \quad (15)$$

und

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n^i G_n(w_2) = G^i(w_2).$$

Dann besteht die Methode in Folgendem: für festen  $\Im w_1 = c_i/c_e$ ,  $\Im w_2 \geq 0$  trägt man den Imaginärteil von  $-\zeta(T_e/T_i) G_i(w_2)$  gegen den Realteil dieser Funktion auf mit  $\Re w_2$  als Parameter; das gleiche tut man mit der Funktion  $G^e(w_1) + k^2 C_e^2 / \omega_p^2$

und mit  $\Re w_1$  als Parameter. Die Schnittpunkte beider Kurven ergeben  $\Re w_2$  und  $\Re w_1$ ; mit dem noch bekannten  $\Im w_1$  kann man also bestimmen

$$\begin{aligned} \Im \omega &= k C_e \cdot \Im w_1, \\ \Re \omega &= k C_i \cdot \Re w_2, \\ u &= (C_i/C_e) \Re w_2 - \Re w_1. \end{aligned} \quad (16)$$

## III. Diskussion verschiedener Verteilungsfunktionen

In diesem Abschnitt werden einige Beispiele diskutiert. Für die Verteilungsfunktion der Ionen wurde stets eine MAXWELL-Verteilung angenommen, die Verteilungsfunktionen der Elektronen sind durch die Koeffizientensätze der Tab. 1 gegeben.

Diese Elektronenverteilungsfunktionen sind in den Abb. 1 a–f dargestellt. Eine 13-Momenten-Methode

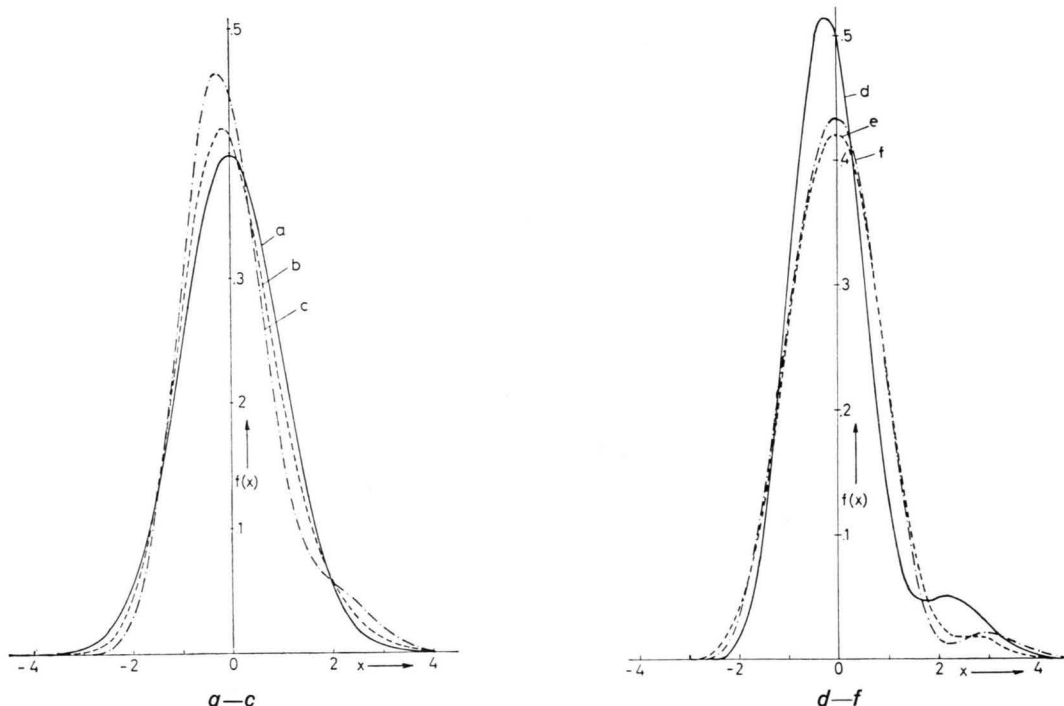


Abb. 1 a–f. Verteilungsfunktionen der Elektronen  $f(x) = (2\pi)^{-1/2} \exp\{-x^2/2\}$ . Die Koeffizienten sind in Tab. 1 angegeben.

	$c_3^e$	$c_4^e$	$c_5^e$	$c_6^e$	$c_n^e$
$n$	3	4	5	6	$\geq 7$
a)	0	0	0	0	0
b)	0,06	0,013	0	0	0
c)	0,125	0,042	0	0	0
d)	0,16	0,08	0	0	0
e)	0,09	0,0563	0,018	0,0075	0
f)	0,105	0,0855	0,021	0,0114	0

Tab. 1.

(3-dimensional, s. GRAD<sup>10</sup>) würde als höchsten Koeffizienten  $c_3^e$  bestimmen, der hier – entsprechend den Rechnungen HERTWECK<sup>11</sup> bezüglich *run-away*-Elektronen nach dieser Methode – von der Größenordnung 0,1 angenommen wurde.  $c_3^e$  allein führt jedoch zu nicht positiv definiten Verteilungsfunktionen. Um das zu vermeiden, wurden in Tab. 1 entsprechend zusätzliche Koeffizienten hinzugenommen.

Die Verteilungsfunktionen zeigen eine kleinere oder größere Zahl von *run-away*-Elektronen, die zum Teil zu einem zweiten Maximum führen und die Schärfe und Lage des Hauptmaximums ändern. Ein zweites Maximum kann, wie bekannt ist, Anlaß zu Instabilität geben unabhängig von den Ionen. Ände-

rung der Schärfe und Lage des Hauptmaximums wird die kritische Relativgeschwindigkeit zwischen Elektronen und Ionen für das Einsetzen einer Instabilität beeinflussen.

*α) Die durch run-away-Elektronen verursachten Instabilitäten, unabhängig von der Ionenbewegung*

In den Abb. 2 a–f sind die zu Tab. 1 gehörigen Funktionen  $G^e(w)$  dargestellt. Läßt man die Ionen außer acht, dann zeigen diese Kurven instabile Lösungen der Dispersionsrelation, falls sie die reelle Achse auf der negativen Seite schneiden. Natürlich ist das nur möglich, falls die zugehörigen Verteilungsfunktionen ein zweites Maximum besitzen; das ist der Fall bei den Abb. 1 d–f bzw. 2 d–f. Diese Kurven weisen verschiedene interessante Ergebnisse aus:

1. Eine Instabilität scheint genau dann einzusetzen, wenn das zweite Maximum der Verteilungsfunktion auftritt. Beide möglichen Nullstellen von  $\Im m G^e$  liegen auf der instabilen Seite. Wenn die Verteilungsfunktion wie in Abb. 1 e einen stationären

<sup>10</sup> H. GRAD, Commun. Pure Appl. Math. **2**, 331 [1949].

<sup>11</sup> F. HERTWECK, Dissertation, Göttingen 1960

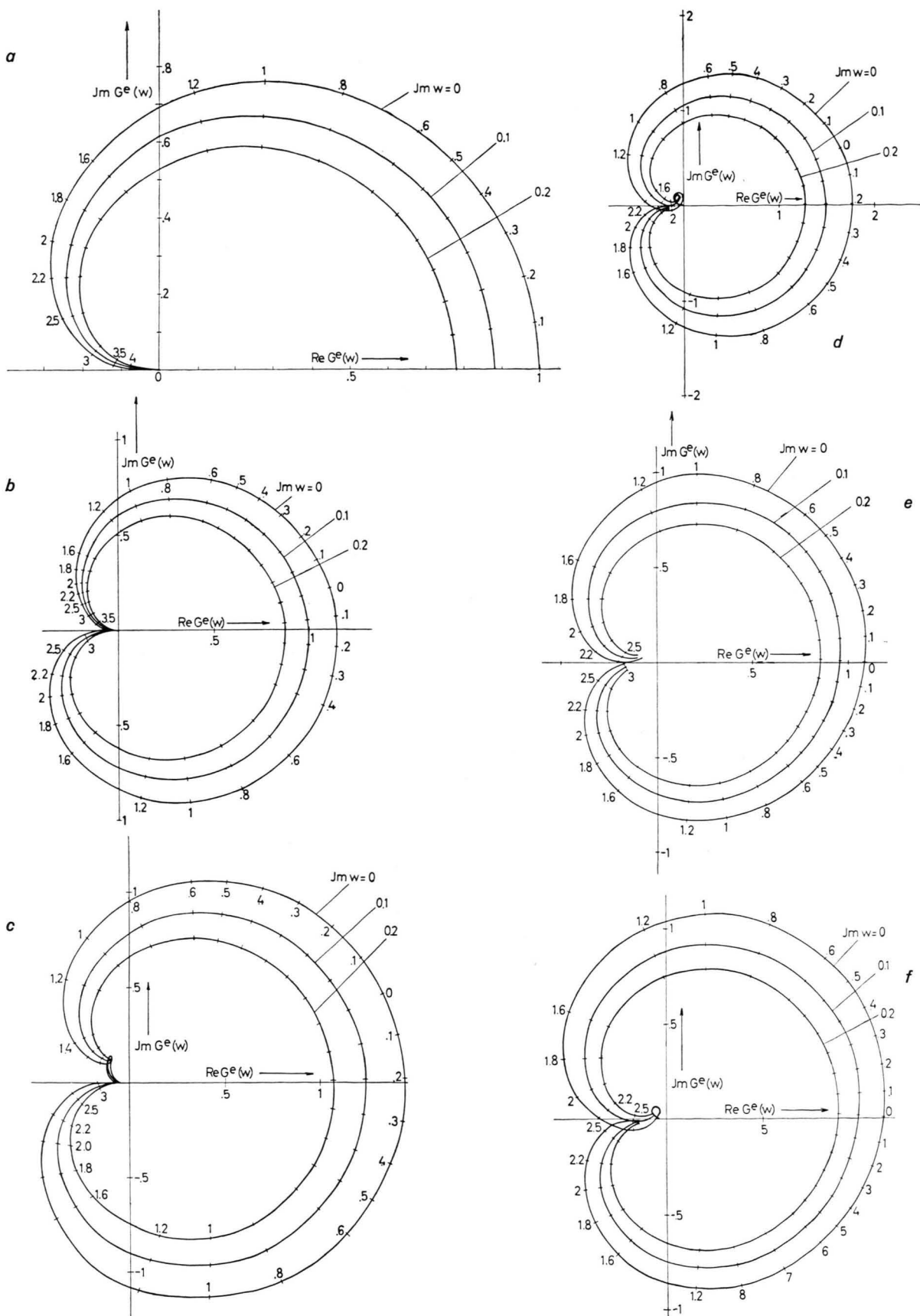


Abb. 2 a–f. Die Funktionen  $G^e(w)$  für die verschiedenen Fälle der Tab. 1. Die Zahlen an den Kurven bedeuten  $\operatorname{Re} w$ . Die Kurven werden durch  $\operatorname{Im} w$  voneinander unterschieden.

Wendepunkt besitzt, berührt die korrespondierende Kurve  $G^e$  gerade die reelle Achse, und zwar auf der instabilen Seite. Dieses Ergebnis ist nicht ganz unerwartet, wenngleich nicht jede zweibucklige Verteilungsfunktion zu Instabilität führt.

2. Der Wellenvektor  $k$  für die instabilen Lösungen ist von der Größenordnung

$$k \approx (\omega_p / C_e) \sqrt{V - G^e(v_{\min} / C_e)}, \quad (17)$$

$v_{\min}$  ist die Geschwindigkeit im Minimum der Ver-

	$X_1$	$X_2$	$\frac{\xi}{T_e/T_i} \times$	$C_e \sqrt{\xi} / C_i$	$u$
2b)	+ 1,1	- 1,32	1	43	- 1,13
	+ 0,57	- 1,9	2	61	- 0,601
	+ 0,2	- 2,5	4	86	- 0,229
	+ 0,05	- 3,0	6	105	- 0,079
	0,01	- 3,1	7,5	117	- 0,0365
2c)	+ 1,0	- 1,16	1	43	- 1,027
	+ 0,57	- 1,63	2	61	- 0,597
	+ 0,18	- 2,35	4	86	- 0,207
	+ 0,02	- 2,7	6	105	- 0,046
	+ 0,01	- 2,8	6,4	108	- 0,036
	- 0,01	- 2,8	6,5	109	- 0,016
	- 1,05	+ 1,56	2	61	+ 1,076
	- 1,56	+ 0,9	1	43	+ 1,581
	- 0,63	+ 2,3	4	86	+ 0,657
	- 0,36	+ 3	8	121	+ 0,385
2d)	+ 0,67	- 1,4	2	61	- 0,693
	+ 1,114	- 0,725	1	43	- 1,131
	+ 0,267	- 2,067	4	86	- 0,291
	+ 0,088	- 2,5	6	105	- 0,102
	+ 0,01	- 2,8	8	121	- 0,033
2e)	+ 0,84	- 1,75	2	61	- 0,87
	+ 1,4	- 1,1	1	43	- 1,43
	+ 0,4	- 2,5	4	86	- 0,43
	+ 0,2	- 3,0	6	105	- 0,23
	+ 0,1	- 3,5	8	121	- 0,13
	+ 0,01	- 4,2	17	177	- 0,034
2f)	+ 1,47	- 0,84	1	43	- 1,49
	+ 0,9	- 1,6	2	61	- 0,926
	+ 0,4	- 2,5	4	86	- 0,429
	+ 0,214	- 2,92	6	105	- 0,232
	+ 0,11	- 3,4	8	121	- 0,138

Tab. 2 b—f. Kritische Geschwindigkeit für das Einsetzen der Zweistrominstabilität in einem Wasserstoffplasma für  $k=0$  [Daten für eine reine MAXWELL-Verteilung (Fall a) können an der Arbeit von JACKSON<sup>7</sup> gefunden werden].

teilungsfunktion.  $G_e$  ist von der Größenordnung 1, also  $k \sim 1/\lambda_D$  ( $\lambda_D$  = DEBYE-Länge). Dementsprechend gilt für den Realteil der Frequenz

$$\Re \omega = \omega_p.$$

3. Die Anwachsraten für die Instabilitäten können ziemlich groß sein, in den Beispielen betragen sie etwa  $0,05 \omega_p$ ; natürlich hängt die Größe von der Tiefe des Minimums ab.

4. Um den durch (17) gegebenen Wert des Wellenvektors gibt es einen gewissen Bereich von  $k$ -Vektoren, in dem instabile Lösungen existieren. Im allgemeinen ist dabei  $k_{\min} \neq 0$ .

### *$\beta$ ) Instabilitäten, verursacht durch die Relativbewegung zwischen Elektronen und Ionen*

Von der Elektronenverteilungsfunktion ist hier nur das Hauptmaximum von Interesse. Die kritische Relativgeschwindigkeit ist daher im wesentlichen durch die Lagen der Hauptmaxima der beiden Verteilungsfunktionen bestimmt. Auf den ersten Blick würde man vielleicht erwarten, daß der kritische Abstand der beiden Maxima um so kleiner ist, je steiler die Elektronenfunktion ist. Das ist jedoch nicht der Fall, wie die Ergebnisse in Tab. 2 zeigen: der kritische Abstand tendiert dazu, größer zu werden für Funktionen, die auf Grund des Einflusses der *run-away*-Elektronen steiler sind. Es ist nun auf der anderen Seite nicht schwer, diesen Sachverhalt zu verstehen: wird die Elektronenverteilungsfunktion steiler, dann wird dadurch die Tiefe der Mulde verringert, die durch die Summe aus der Elektronenverteilungsfunktion und der reduzierten Ionenverteilungsfunktion entsteht; das bedeutet aber, das System wird stabiler für kleine Relativgeschwindigkeiten. Für große Relativgeschwindigkeiten dreht sich entsprechend der Sachverhalt um.

Ich danke Frau G. HAIN für ihre Hilfe bei der Durchführung der numerischen Rechnungen auf dem Digitalrechner G 3 des Max-Planck-Institutes für Physik und Astrophysik, München.